Warnhinweis

Diese Lösungen dienen nur der Selbstkontrolle. Sie stellen keine „Musterlösung“ dar. Diese Lösungen können Fehler enthalten. Einige Beweise und Berechnungen sind stark abgekürzt. In einer Klausur muss also teilweise ausführlicher begründet werden. Wenn ihr Euch unsicher seid, fragt einfach nochmal nach. Wenn ihr Fehler findet, sagt Bescheid.

Grundlagen, Lösungen!

1) a) Richtig

b) Falsch (die Umkehrung gilt auch)

c) Falsch, denn $5 \in A$ und $5 \in B$

d) Falsch, denn $20 \in B$, aber $10 \notin A$ $(2 \cdot 10 = 20)$

e) Richtig

f) Falsch, f ist weder inj. noch surj.

Surj: Für $2 \in \mathbb{R}$ ex. kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2$.

g) Richtig

2) i) $M := \{1\} \Rightarrow P(M) = P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$

ii) $M := \{\emptyset\} \Rightarrow P(M) = \{\emptyset, \{M\}\}$

iii) $M := \{$Berlin, Amsterdam, Paris$\}$

$\Rightarrow P(M) = \{\emptyset, M, \{$Berlin$\}, \{$Amsterdam$\}, \{$Paris$\},$
$\{$Berlin, Paris$\}, \{$Berlin, Amsterdam$\}, \{$Paris, Amsterdam$\}\}$

iv) $M := \{1, 3, \{1,3\}\}$

$\Rightarrow P(M) = \{\emptyset, M, \{1\}, \{3\}, \{\{1,3\}\}, \{1, \{1,3\}\},$
$\{3, \{1,3\}\}, \{1,3\}\}$

3) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 13\} \cup \{x, y \in \mathbb{R} \mid y = 2x\}$

$A \cap B = \emptyset$

4) . $A \cup B = A \cup B$

. $A \cap B = \emptyset$

. $(A \cup B) \cup C = \mathbb{R} \setminus \{8\} \cup [-2, -1]$

. $(A \cup B) \cap C = \emptyset$

5) Seien $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Reflexivität: Wegen $a^2 + b^2 = a^2 + b^2$ f.a. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ gilt
$(a,b) \sim (a,b)$ f.a. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. $\Rightarrow \sim$ ist refl.

$\sqrt{8}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ (ungerade Zahlen

Symmetrie: Aus $(a,b) \sim (c,d)$ folgt $a^2+b^2 = c^2+d^2$, also $c^2+d^2 = a^2+b^2$ und somit $(c,d) \sim (a,b) \Rightarrow \sim$ ist symm.

Transitivität: Aus $(a,b) \sim (c,d)$ und $(c,d) \sim (e,f)$ folgt $a^2+b^2 = c^2+d^2 = e^2+f^2$, also $(a,b) \sim (e,f) \Rightarrow \sim$ ist trans.

ÄK: ÄK von $(2,2)$ ist der Kreis um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{8}$.

6) $f(x) := x+1 \quad \forall x \in \mathbb{N}$ (1 wird nie getroffen)
oder $f(x) := 2x, \ \forall x \in \mathbb{N}$ (ungerade Zahlen)

7) $f(x) := \begin{cases} 1, & x = 1 \\ x-1, & x \geq 2 \end{cases}$

8) a)
IA: $n = 0$: $0^3 - 6 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0 = 0$ ist durch 3 ohne Rest teilbar.

ISch: $(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 14(n+1) = \ldots$

$$\ldots = (n^3+3n^2+3n+1) - 6(n^2+2n+1) + 14(n+1)$$
$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 6n^2 - 12n - 6 + 14n + 14$$
$$= n^3 - 3n^2 + 5n + 9$$
$$= n^3 - 6n^2 + 14n + 3n^2 - 9n + 9$$
$$= (n^3 - 6n^2 + 14n) + 3(n^2 - 3n + 3)$$

ist durch 3 teilbar, da der erste Summand durch 3 teilbar ist (nach IV) und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 3 ist.

In der Klausur muss natürlich noch eine ordentliche IV formuliert werden!

b) IA: $n=1$: linke Seite: 1

rechte Seite: $1^2 = 1$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

c) IA: $n=5$: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$

I Sch.:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 3n > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

9)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4

oder in einer Formel:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}: \quad \forall x \in \mathbb{N}: f(x) = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & n \text{ ist ungerade} \\ -\frac{n}{2} & n \text{ ist gerade} \end{cases}$$

Lösungen „Gruppen, Ringe, Körper"

1. Aufgabe:

Sei $G = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ und

$$*: G \times G \to G, \qquad a * b := (a-3)(b-3)+3$$

eine Verknüpfung auf G.

a) Zeige, dass $(G,*)$ eine abelsche Gruppe ist.

b) Sei $(G_2, *_2) := (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ eine zweite Gruppe. Begründe, warum $f: G \to G_2$ definiert durch $f(x) = (x-3)^2$ ein Gruppenhomomorphismus von G nach G_2 ist.

Lösung: a) Laut Voraussetzung ist G eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf G. Wir beweisen nun die Punkte 1, 2, 3 der Def. 3.1.1.

1) Seien $a, b, c \in G$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a*(b*c) &= a*((b-3)(c-3)+3) \\ &= (a-3)((b-3)(c-3)+3-3)+3 \\ &= (a-3)(b-3)(c-3)+3 \\ &= ((a-3)(b-3)+3-3)\cdot(c-3)+3 \\ &= ((a-3)(b-3)+3)*c \\ &= (a*b)*c \end{aligned}$$

2) Es ist $4 \in G$ (da $4 \neq 3$).

a) Sei weiter $a \in G$ beliebig. Dann gilt:

$$4*a = (4-3)\cdot(a-3)+3 = (a-3)+3 \cdot 3$$

Somit ist 4 das neutrale Element der Gruppe.

b) Sei wieder $a \in G$ bel. Dann ist $b := \frac{3a-8}{a-3} \in G$,

denn: Ang. $b \notin G$. Dann gäbe es ein $a \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$ mit

$$\frac{3a-8}{a-3} = 3 \Leftrightarrow -8 = -9 \;\lightning$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} b*a &= \left(\frac{3a-8}{a-3} - 3\right)(a-3)+3 \\ &= \left(\frac{3a-8-3a+9}{a-3}\right)\cdot(a-3)+3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Somit ist b das inverse Element zu a.

c) Seien $a,b \in G$ beliebig. Dann ist

$$a*b = (a-3)(b-3)+3 = (b-3)(a-3)+3 = b*a$$

Insgesamt folgt, dass G eine abelsche Gruppe ist.

b) Es handelt sich bei f tatsächlich um eine Abbildung von G nach G_2, denn für alle $x \in G = \mathbb{R}\setminus\{3\}$ gilt $f(x) = (x-3)^2 > 0$ und somit $f(x) \in G_2$. Seien weiter $a,b \in G$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(a*b) = f((a-3)(b-3)+3) &= ((a-3)(b-3)+3-3)^2 \\ &= ((a-3)(b-3))^2 \\ &= (a-3)^2(b-3)^2 \\ &= f(a)\cdot f(b) \end{aligned}$$

2. Aufgabe:

Sei $(G,*)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element e. Zeige, dass

$$U = \{u \in G \mid u = u^{-1}\}$$

eine Untergruppe von $(G,*)$ ist.

Lösung: Offensichtlich ist $U \subseteq G$. Wegen $e*e = e$ ist $e \in U$ und somit $U \neq \emptyset$. Seien weiter $u,v \in U$. Dann gilt $u = u^{-1}$ und $v = v^{-1}$ und somit folgt: $u*u = e$ und $v*v = e$. Also gilt:

$$\begin{aligned} (u*v^{-1})*(u*v^{-1}) &= (u*v)*(u*v) \underset{\text{da } G \text{ abelsch}}{=} (u*v)*(v*u) \\ &\overset{\text{Asso.gesetz}}{=} u*(v*(v*u)) \overset{\text{Asso.g.}}{=} u*((v*v)*u) \\ &= u*(e*u) \\ &= u*u \\ &= e \end{aligned}$$

Somit $u*v^{-1} = (u*v^{-1})^{-1}$ und U ist nach Satz 3.1.7. eine Untergruppe.

3. Aufgabe:

Welche Mengen sind Ringe, welche Körper? Welche Ringe sind kommutativ? Welche haben ein Einselement?

☐ $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \cdot)$ X X ☒ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ X X X ☒ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

X ☒ Die Menge aller geraden Zahlen $\{z \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2 \cdot k\}$

☐ Die Menge aller ungeraden Zahlen $\{z \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2 \cdot k + 1\}$

X X X ☒ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ X X ☒ X $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ☐ Der Vektorraum $\mathbb{R}^2$

X X X ☒ $\{a + b \cdot \sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit der normalen Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$.

Legende: X : „ist Ring"

X : „ist Körper"

X : „ist kommutativ"

X : „hat Einselement"

4. Aufgabe:

Gegeben sei die Menge

$$M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$$

a) Zeige, dass M mit Matrix-Addition und der Matrix-Multiplikation ein Ring ist!

b) Entscheide, ob M nullteilerfrei ist, kommutativ ist oder ein Einselement hat. Begründe oder widerlege!

c) Es gelten nun zusätzlich die folgenden Bedingungen:

$$b = 0, \quad a \cdot d \neq 0$$

Wird M mit diesen zusätzlichen Bedingungen ein Körper?

Lösung: a) Wegen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ ist M eine nicht leere Menge. Die Matrix-Addition und die Matrix-Multiplikation sind Verknüpfungen auf M, denn:

Seien $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in M$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ 0 & d+z \end{pmatrix} \in M \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x & a \cdot y + b \cdot z \\ 0 & d \cdot z \end{pmatrix} \in M$$

Wir weisen nun 1. a), b), c) aus Def. 3.2.1. nach.

1a) $(M,+)$ ist additive abelsche Gruppe:

$(M,+)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^{2\times 2},+)$, denn für alle $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 0 & v_3 \end{pmatrix} \in M$ gilt:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & u_3 \end{pmatrix} + \left(-\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 0 & v_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_1 & -v_2 \\ 0 & -v_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_1+(-v_1) & u_2+(-v_2) \\ 0 & u_3+(-v_3) \end{pmatrix} \in M$$

Da $(\mathbb{R}^{2\times 2},+)$ eine abelsche Gr. ist nach Vorlesung, ist somit auch $(M,+)$ eine abelsche Gruppe.

1b) + 1c) Sind $A,B,C \in M$, so sind auch $A,B,C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und somit gilt sofort $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$,
$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$ und
$(B+C)\cdot A = B\cdot A + C\cdot A$

b) M ist <u>nicht</u> nullteilerfrei, denn für $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M ist <u>nicht</u> kommutativ, denn für $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

M hat ein Einselement, denn das Einselement von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ (die Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) liegt in M.

c) Es gelte nun zusätzlich $b=0$, $a\cdot d \neq 0$. Sei also $\tilde{M} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a,d \in \mathbb{R}, a\cdot d \neq 0 \right\}$. Dann ist $(\tilde{M}\setminus\{0\},\cdot)$ zwar eine abelsche Gruppe (siehe unten), aber $\tilde{M}$ ist dennoch kein Körper, denn: Mit der zusätzlichen Bedingung $b=0$, $a\cdot d \neq 0$ liegt die Nullmatrix nicht mehr in $\tilde{M}$. Somit gibt es in $\tilde{M}$ kein neutrales Element der Addition. $(\tilde{M},+)$ ist also keine abelsche Gruppe.

Wir zeigen trotzdem (zum Spaß ;)), dass $(\tilde{M}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist:

- Verknüpfung: Sind $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \tilde{M}$, so ist auch
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \tilde{M}.$$
- Assoz.: Da die Assoziativität in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt, gilt sie auch in $\tilde{M}$.
- neutrales Element: Es ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \tilde{M}$ und für alle $A \in \tilde{M}$ gilt (nach VL): $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = A$
- inverse: Ist $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \tilde{M}$, so ist auch $\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} \in \tilde{M}$

  und es gilt $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- abelsch: Seien $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \tilde{M}$. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x & 0 \\ 0 & d \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot a & 0 \\ 0 & y \cdot d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Vektorräume I - Lösungen

1. Aufgabe:

Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume, und welche nicht?

a) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum. Das ist aus der Vorlesung bekannt.

b) $(V, +, \cdot)$, wobei $V := \{(1, x, y)^T \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist kein Vektorraum. Es ist z.B. $(1, 2, 3)^T \in V$ aber $2 \cdot (1, 2, 3)^T = (2, 4, 6)^T \notin V$.

c) $(\mathbb{Z}^3, +, \cdot)$ ist kein Vektorraum, da $\mathbb{Z}$ kein Körper ist.

d) $(V, +, \cdot)$, wobei $V := \{(0, x, y, 0)^T \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ ist ein Vektorraum. Begründung: z.B. Wir wenden das Teilraumkriterium an und zeigen, dass V ein $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathbb{R}^4$ ist.

(i) Seien $(0, a, b, 0)^T, (0, x, y, 0)^T \in V$ beliebig. Es ist dann

$$(0, a, b, 0)^T + (0, x, y, 0)^T = (0, \underbrace{a + x}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{b + y}_{\in\mathbb{R}}, 0) \in V.$$

(ii) Seien $(0, a, b, 0)^T, \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Es ist dann

$$\lambda \cdot (0, a, b, 0)^T = (0, \underbrace{\lambda \cdot a}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\lambda \cdot b}_{\in\mathbb{R}}, 0) \in V.$$

Insgesamt ist V ein Teilraum von $\mathbb{R}^4$ und damit selbst ein Vektorraum.

2. Aufgabe:

Zeige: Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und seien $U, W \subseteq V$. Wenn $U \subseteq W$ ist, dann gilt $\langle U \cap W \rangle = \langle U \rangle \cap \langle W \rangle$. Gilt die Aussage auch, wenn $U \nsubseteq W$ ist?

Proof. Ist $U \subseteq W$, dann ist $U \cap W = U$. Angenommen es existiert ein $u \in \langle U \rangle$ so, dass $u \notin \langle W \rangle$ ist. Dann gibt es $u_1, ...u_n \in U (n \in \mathbb{N})$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ so, dass

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

ist. Da nun $u \notin \langle W \rangle$ ist, existiert mindestens ein $j \in \{1, ..., n\}$ so, dass $u_j \notin W$ ist. Das ist ein Widerspruch zu $U \subseteq W$ und deshalb ist $\langle U \rangle \subseteq \langle W \rangle$, also ist $\langle U \rangle \cap \langle W \rangle = \langle U \rangle$. Insgesamt ist

$$\langle U \cap W \rangle = \langle U \rangle = \langle U \rangle \cap \langle W \rangle$$

und wir sind fertig. $\square$

Ist $U \nsubseteq W$, so gilt die Aussage im Allgemeinen nicht. Ein Gegenbeispiel ist hier z.B. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, U = \{(1, 1)^T\}, W = \{(2, 2)^T\}$, denn es ist

$$\langle \{(1, 1)^T\} \cap \{(2, 2)^T\} \rangle = \langle \emptyset \rangle \neq \langle \{(1, 1)^T\} \rangle = \langle \{(1, 1)^T\} \rangle \cap \langle \{(2, 2)^T\} \rangle.$$

3. Aufgabe:

Betrachte den Vektorraum $V := Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit geeigneten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ über dem Körper $\mathbb{R}$. Zeige, dass die Menge aller $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ein Untervektorraum von V ist. (Tipp: Mach dir zuerst klar, was $+$ und $\cdot$ tun.)

Proof. Sei L die Menge aller $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Es ist dann $L \subseteq Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Wir benutzen das Teilraumkriterium. Seien $\alpha, \beta \in L$ beliebig. Seien weiter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ beliebig. Es ist

$$(\alpha+\beta)(a+b) \underset{Def.\,+}{=} \alpha(a+b)+\beta(a+b) \underset{lin.\,Eig.}{=} \alpha(a)+\alpha(b)+\beta(a)+\beta(b) = \underbrace{\alpha(a)+\beta(a)}_{=(\alpha+\beta)(a)} + \underbrace{\alpha(b)+\beta(b)}_{=(\alpha+\beta)(b)} = (\alpha+\beta)(a)+(\alpha+\beta)(b)$$

und

$$c\cdot(\alpha+\beta)(a) \underset{Def.\,+}{=} c\cdot(\alpha(a)+\beta(a)) = c\cdot\alpha(a)+c\cdot\beta(a) \underset{lin.\,Eig.}{=} \alpha(c\cdot a)+\beta(c\cdot a) = (\alpha+\beta)(c\cdot a)$$

also ist auch $\alpha+\beta \in L$. Seien nun wieder $\alpha \in L, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ beliebig. Es ist

$$(d\cdot\alpha)(a+b) \underset{Def.\,\cdot}{=} d\cdot\alpha(a+b) \underset{lin.\,Eig.}{=} d\cdot(\alpha(a)+\alpha(b)) = d\cdot\alpha(a)+d\cdot\alpha(b) = (d\cdot\alpha)(a)+(d\cdot\alpha)(b)$$

und

$$c\cdot(d\cdot\alpha)(a) \underset{Def.\,\cdot}{=} c\cdot d\cdot\alpha(a) \underset{lin.\,Eig.}{=} d\cdot\alpha(c\cdot a) = (d\cdot\alpha)(c\cdot a)$$

also ist auch $d\cdot\alpha \in L$. Insgesamt folgt mit dem Teilraumkriterium, dass L ein Untervektorraum von $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist. $\square$

4. Aufgabe:

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Welche der Mengen U sind ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V und welche nicht? Begründe!

a) $V = \mathbb{R}^3, U = \{(x, y, 0)^T \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
U ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V. Begründung: z.B.
Es ist klar, dass $U \subseteq V$ ist. Wir wenden also das Teilraumkriterium an. Seien nun $(x, y, 0)^T, (a, b, 0)^T \in U, \lambda \in K$ beliebig. Es ist

$$(x, y, 0)^T + (a, b, 0)^T = (\underbrace{x+a}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{y+b}_{\in\mathbb{R}}, 0)^T \in U$$

und weiter ist

$$\lambda\cdot(x, y, 0)^T = (\underbrace{\lambda\cdot x}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\lambda\cdot y}_{\in\mathbb{R}}, 0)^T \in U$$

also ist insgesamt U ein Untervektorraum von V.

b) $V = \mathbb{C}, U = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \exists \beta \in \mathbb{C} : \alpha = 2\beta\}$
U ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V. Begründung: z.B.
Es ist $0 = 2\cdot 0$, also ist $0 \in U$. Weiterhin ist $\mathbb{C}$ ein Körper. Für alle $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ existiert also schon ein $\alpha^{-1} \in \mathbb{C}$ so, dass $\alpha\cdot\alpha^{-1} = 1$ ist, also insbesondere auch für 2. Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ ist also

$$\alpha = 1 \cdot \alpha = 2 \cdot \underbrace{2^{-1} \cdot \alpha}_{=:\beta \in \mathbb{C}} \Rightarrow \alpha \in U$$

also ist insgesamt $\mathbb{C} \subseteq U$. Da offensichtlich auch $U \subseteq \mathbb{C}$ ist, ist nun $\mathbb{C} = U$ und damit U selbst ein Vektorraum.
Alternativ mit dem klassischen Weg:
Es ist für alle $\alpha \in U$ schon $\alpha \in \mathbb{C}$, also ist $U \subseteq \mathbb{C}$. Wir wenden das Teilraumkriterium an. Seien $\alpha, \beta \in U$ beliebig. Dann existieren $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{C}$ so, dass $\alpha = 2\alpha_0$ ist und $\beta = 2\beta_0$. Es ist nun

$$\alpha + \beta = 2\alpha_0 + 2\beta_0 \underset{\mathbb{C}\, ist\, VR}{=} 2 \cdot \underbrace{(\alpha_0 + \beta_0)}_{\in \mathbb{C},\, weil\, VR}$$

also ist auch $\alpha + \beta \in U$. Sei nun wieder $\alpha \in U$ beliebig und sei zusätzlich $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann existiert wieder $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{C}$ so, dass $\alpha = 2\alpha_0$ ist. Es ist

$$\lambda \cdot \alpha = \lambda \cdot 2\alpha_0 = 2 \cdot \underbrace{\lambda\alpha_0}_{\in \mathbb{C},\, weil\, VR}$$

also ist auch $\lambda\alpha \in U$. Insgesamt ist nun U ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V.

c) $V = \mathbb{R}^4, U = \{(x, 2x)^T \mid x \in \mathbb{R}\}$
U ist kein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V, denn es ist $U \nsubseteq V$.

d) $V = \mathbb{R}^2, U = \{(a, 2a+1)^T \mid a \in \mathbb{R}\}$
U ist kein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V. Begründung: z.B.
Es ist $(1,3)^T \in U$ und $2 \in \mathbb{R}$, aber es ist

$$2 \cdot (1,3)^T = (2,6)^T \neq (2,5)^T = (2, 2 \cdot 2 + 1)^T$$

also ist $2 \cdot (1,3)^T \notin U$ und damit ist U kein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

5. Aufgabe:

Welche Aussage ist richtig?

- ☐ Das Erzeugnis einer linear unabhängigen Menge ist immer linear unabhängig.
  Die Aussage ist falsch. Das Erzeugnis einer linearen unabhängigen Menge ist immer selbst ein Vektorraum, also linear abhängig.

- ☐ Seien V ein Vektorraum über dem Körper K, $U \leq V$ und $u \in U$. Dann ist $\langle U + \{u\} \rangle = \langle U \rangle \cup \langle \{u\} \rangle = \langle U \rangle$.
  Die Aussage ist wahr. Wenn $u \in U$ ist, dann ist $U + \{u\} = U$ und somit gilt die angegebene Gleichung.

- ☐ Die Vereinigung zweier Untervektorräume ist immer wieder ein Untervektorraum.
  Die Aussage ist falsch. Betrachten wir z.B. die Unterräume $\langle (1,0)^T \rangle$ und $\langle (0,1)^T \rangle$ von $\mathbb{R}^2$, dann ist $(1,0)^T + (0,1)^T = (1,1)^T \notin \langle (1,0)^T \rangle \cup \langle (0,1)^T \rangle$, und damit ist die Vereinigung kein Vektorraum. Für den Schnitt wäre die Aussage allerdings wahr.

- ☐ Jeder Vektorraum ist ein Untervektorraum von sich selbst.
  Die Aussage ist wahr. Sie folgt aus der Definition für Untervektorräume.

- ☐ Es existiert ein Vektorraum, der keine Untervektorräume besitzt.
  Die Aussage ist falsch, denn jeder Vektorraum hat mindestens sich selbst als Untervektorraum.

6. Aufgabe:

Es wird Zeit ein bisschen zu suchen! Findet ...

a) ... einen Vektorraum, der gleichzeitig ein Körper ist.
z.B. $\mathbb{R}$

b) ... einen Vektorraum, dessen Elemente keine Zeilen- oder Spaltenvektoren sind.
z.B. $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

c) ... einen Vektorraum, dessen einziger Untervektorraum er selbst ist.
der Nullraum $\{0_V\}$

d) ... einen Vektorraum, dessen Elemente Mengen sind.
jeder Faktorraum

Vektorräume II -Lösungen

1. Aufgabe:

Prüfe auf lineare Abhängigkeit!

a) Seien $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^3, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Prüfe die Vektoren v, w, u auf lineare Abhängigkeit!
Die Vektoren sind linear abhängig, denn es ist

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Seien $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{C}^2, U = \{\begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3i \end{pmatrix}\}$. Prüfe die Menge U auf lineare Abhängigkeit!
Die Menge U ist linear unabhängig. Angenommen sie wäre linear abhängig. Dann würden endlich viele verschiedene Elemente aus U geben, die linear abhängig wären. Da U nur zwei Elemente hat, reiht es diese auf lineare Abhängigkeit zu prüfen. Wir nehmen also an, dass $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ existieren so, dass

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda i - \gamma \\ 3\lambda - 3\gamma i \end{pmatrix}$$

ist. Wir erhalten also die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= -\gamma + \lambda i \\ 0 &= 3\lambda - 3\gamma i. \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Imaginärteile erhalten wir nun $\lambda = -3\gamma$ und durch Vergleich der Realteile $\gamma = -3\lambda$. Also haben wir insgesamt

$$\gamma = -3\lambda = 9\gamma \Leftrightarrow \gamma = 0$$

und damit auch $\lambda = -3 \cdot 0 = 0$. Das ist ein Widerspruch zu $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Damit sind insgesamt alle Elemente von U linear unabhängig, also ist auch U linear unabhängig.

c) Seien $K = \mathbb{C}, V = \mathbb{C}^2, U = \{\begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3i \end{pmatrix}\}$. Prüfe die Menge U auf lineare Abhängigkeit!
Die Menge U ist linear abhängig, denn es ist

$$-i \cdot \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

d) Seien $K = \mathbb{C}, V = \mathbb{C}^3, U = \{(x,y,0)^T \,|\, x,y \in \mathbb{R}\}, v = \begin{pmatrix} 2+i \\ 3i \\ 0 \end{pmatrix}$. Prüfe, ob der Vektor v linear Abhängig ist von der Menge U!
v ist linear abhängig von U, denn es sind $(2,0,0)^T, (1,3,0)^T \in U$ und es ist

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 3i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe:

Bestimme für die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ ein Erzeugendensystem!

a) $U_1 = \{(2a, a-b)^T \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
Es ist

$$U_1 = \{(2a, a-b)^T \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(2a, a)^T + (0, -b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{a \cdot (2,1)^T + b \cdot (0,-1)^T \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

und wir sehen, dass $\{(2,1)^T, (0,-1)^T\}$ ein Erzeugendensystem für U_1 ist.

b) $U_2 = \{(x,y)^T \mid x, y \in \mathbb{R}, x = 2y\}$
Es ist

$$U_2 = \{(x,y)^T \mid x, y \in \mathbb{R}, x = 2y\} = \{(x, 2x)^T \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x \cdot (1,2)^T \mid x \in \mathbb{R}\}$$

und wir sehen, dass $\{(1,2)^T\}$ ein Erzeugendensystem für U_2 ist.

3. Aufgabe:

Begründe, dass die Menge

$$B = \{(1,2,0)^T, (3,0,0)^T, (0,0,1)^T, (2,4,5)^T\}$$

keine Basis für $\mathbb{R}^3$ bildet und finde eine Teilmenge von B, die eine Basis bildet.

Proof. Es ist

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also ist B nicht linear unabhängig, also kann B keine Basis von $\mathbb{R}^3$ sein. (Alternativ könnte hier auch über die Gleichmächtigkeit von Basen argumentiert werden, da z.B. die Standardbasis mit 3 Elementen bekannt ist)
Sei $\tilde{B} := B \setminus \{(2,4,5)^T\}$. Dann ist $\tilde{B}$ linear unabhängig (da die Vektoren hier sehr einfach sind, kann das gesehen werden. Ansonsten über die Lösung des dazugehörigen LGS). Da nun $|\tilde{B}| = 3$ ist, $\tilde{B}$ linear unabhängig ist und bekannt ist, dass $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ ist, folgt direkt dass $\tilde{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. (siehe Vorlesung) (Hier kann natürlich auch alternativ gezeigt werden, dass $\langle \tilde{B} \rangle = \mathbb{R}^3$ ist.) $\square$

4. Aufgabe :

Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $B := \{(1,2,a)^T, (a, 2a, 9)^T\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Vektoren $(1,2,a)^T, (a,2a,9)^T$ linear abhängig sind.
Für alle $a \in \{-3, 3\}$ sind die Vektoren linear abhängig.

Proof. Sei zuerst $a = -3$, dann ist

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und für $a = 3$ ist

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also sind die Vektoren in beiden Fällen linear abhängig. Angenommen es existiert ein $a \in \mathbb{R} \backslash \{-3, 3\}$ so, dass die Vektoren linear abhängig sind. Dann gibt es $\lambda, \gamma \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ so, dass

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + a \cdot \gamma \\ 2\lambda + 2a \cdot \lambda \\ a \cdot \lambda + 9\gamma \end{pmatrix}$$

ist. Aus der ersten (oder der zweiten) Zeile erhalten wir nun

$$0 = \lambda + a\gamma \Leftrightarrow \lambda = -a\gamma.$$

Setzten wir nun das in die letzte Zeile ein, so erhalten wir

$$0 = -a^2\gamma + 9\gamma = (-a^2 + 9) \cdot \gamma.$$

Diese Gleichung ist wahr, genau dann wenn $a = 3$ oder $a = -3$ ist, im Widerspruch zu $a \in \mathbb{R} \backslash \{-3, 3\}$, oder wenn $\gamma = 0 \Rightarrow \lambda = -a \cdot 0 = 0$ ist, im Widerspruch zu $\lambda, \gamma \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Insgesamt folgt die Behauptung. $\square$

b) Wähle a so, dass $(1,2,a)^T, (a,2a,9)^T$ linear unabhängig sind und ergänze B zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.
z.B. Wir wählen $a = 0$, dann ist $B = \{(1,2,0)^T, (0,0,9)^T\}$. Dann ergänzen wir mit $(0,1,0)^T$ und erhalten $\tilde{B} = \{(1,2,0)^T, (0,0,9)^T, (0,1,0)^T\}$. Es ist $\tilde{B}$ linear unabhängig. Da nun $|\tilde{B}| = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ ist, ist $\tilde{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

5. Aufgabe:

Wir betrachten den Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$

$$U_1 = \{(a, 0, a)^T \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

a) Sei nun zusätzlich

$$U_2 = \{(a, b, c)^T \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a - b - c = 0\}$$

als weiterer Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ gegeben. Zeige, dass $U_1 \subseteq U_2$ ist und finde einen von U_1 verschiedenen Untervektorraum U_3 von $\mathbb{R}^3$ so, dass $U_2 \cap U_3 = U_1$ ist.

Es sei $(a, 0, a)^T \in U_1$ beliebig mit $a \in \mathbb{R}$. Es ist $a - 0 - a = 0$, also ist auch $(a, 0, a)^T \in U_2$. damit folgt $U_1 \subseteq U_2$.

Sei nun $U_3 := \{(a, 0, b)^T \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Mit dem TRK lässt sich einfach zeigen, dass das ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist. Es ist

$$U_2 \cap U_3 = \{(a, b, c)^T \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a - b - c = 0\} \cap \{(a, 0, b)^T \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a, 0, b)^T \mid a, b \in \mathbb{R}, a - b = 0\} = \{(a, 0, a)^T \mid a \in \mathbb{R}\} = U_1.$$

Alternativ kann hier natürlich auch auf Aussagenlogik zurückgegriffen werden.

b) Gib jeweils eine Basis und die Dimension von U_1, U_2 und U_3 an.

Es ist

$$U_1 = \{(a, 0, a)^T \mid a \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 1)^T \rangle$$

also ist $\{(1, 0, 1)^T\}$ eine Basis von U_1 und es ist $\dim U_1 = 1$.

Weiter ist

$$U_2 = \{(a, b, c)^T \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a - b - c = 0\} = \{(b + c, b, c)^T \mid b, c \in \mathbb{R}\} = \{b \cdot (1, 1, 0)^T + c \cdot (1, 0, 1)^T \mid b, c \in \mathbb{R}\} = \langle \{(1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T\} \rangle$$

und da $\{(1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T\}$ auch linear unabhängig ist, ist $\{(1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T\}$ eine Basis von U_2 und es ist $\dim U_2 = 2$.

Weiter ist

$$U_3 = \{(a, 0, b)^T \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{a \cdot (1, 0, 0)^T + b \cdot (0, 0, 1)^T \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \langle \{(1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T\} \rangle$$

und da $\{(1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$ auch linear unabhängig ist, ist $\{(1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$ eine Basis von U_2 und es ist $\dim U_3 = 2$.

c) Bestimme die Dimension von $U_2 + U_3$.

Es ist

$$\dim U_2 + U_3 = \dim U_2 + \dim U_3 - \dim U_2 \cap U_3 = \dim U_2 + \dim U_3 - \dim U_1 = 2 + 2 - 1 = 3.$$

6. Aufgabe:

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{3\times 2}$.

a) Gib ein Beispiel für eine linear unabhängige Teilenge von V mit drei Elementen an.
z.B. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist so eine Menge.

b) Welche Dimension hat der Untervektorraum $U_1 = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 2} \mid a_{ij} = 0 \, f\ddot{u}r \; i > j\}$?
Es ist

$$U_1 = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 2} \mid a_{ij} = 0 \, f\ddot{u}r \; i > j\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, c, d \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Es ist zusätzlich $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ linear unabhängig und damit eine Basis von U_1. Es ist also $\dim U_1 = 3$.

c) Finde einen Untervektorraum U_2 von V so, dass $U_1 \oplus U_2 = V$ ist! ($\oplus$ bezeichnet hierbei die direkte Summe)
Sei $U_2 := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Dann ist anhand der Basisvektoren klar, dass $U_1 \cap U_2 = \{0_{\mathbb{R}^{3\times 2}}\}$ ist. Weiterhin ist $\dim U_2 = 3$ und es ist

$$\dim U_1 + U_2 = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_1 \cap U_2 = 3 + 3 - 0 = 6 = \dim \mathbb{R}^{3\times 2}$$

und damit muss schon $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^{3\times 2}$ sein. Insgesamt folgt also $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^{3\times 2}$.

7. Aufgabe:

Seien $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \langle\{(1, 2, 0)^T, (0, 0, 3)^T\}\rangle$. Schreibe ein Element von V/U hin und bestimme $\dim(V/U)$!
Ein Element von V/U ist z.B. U selbst. Ansonsten haben alle Elemente die Form (Sei $(x, y, z)^T \in V$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V, \lambda, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir können hier anhand des Erzeugnendensystems von U sehen (oder uns schnell klarmachen), dass $\dim U = 2$ ist. Es ist nun

$$\dim V/U = \dim V - \dim U = 3 - 2 = 1.$$

8. Aufgabe :

Entscheide, ob die Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe die wahren Aussagen und korrigiere die falschen!

- ☐ Alle Basen eines Vektorraumes sind gleichmächtig.
  Die Aussage ist wahr.

- ☐ Jeder Vektorraum ist endlich erzeugt.
  Die Aussage ist falsch $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist z.B. nicht endlich erzeugt.

- ☐ Ein Vektorraum hat nur genau eine Basis. Die Mächtigkeit dieser Basis gibt die Dimension des Vektorraumes an.
  Die Aussage ist falsch, ein Vektorraum hat im Allgemeinen mehr als eine Basis. Aber die Mächtigkeit dieser Basen gibt tatsächlich die Dimension an.

- ☐ Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, seien U_1, U_2 Untervektorräume von V mit der Eigenschaft $\dim(V) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$ und seien B_1, B_2 Basen von U_1, U_2. Dann ist $B_1 \cup B_2$ schon eine Basis von V.
  Die Aussage ist im Allgemeinen falsch, denn sie gilt nur für die direkte Summe. Die Unterräume U_2 und U_3 von $\mathbb{R}^3$ in Aufgabe 5 sind z.B. ein Gegenbeispiel.

Lineare Abbildungen - Lösungen

1. Aufgabe:

Überprüfe, welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-linear sind und bestimme für die linearen Funktionen das Bild und den Kern der Abbildung.

a) $f((x_1, x_2, x_3)^T) := (x_1 - 3x_3, 1 + 2x_2)^T$

b) $f((x_1, x_2, x_3)^T) := (x_1^2 - 3x_3, 2x_2)^T$

c) $f((x_1, x_2, x_3)^T) := (0, 0)^T$

Lösung:
a) $f((0,0,0)^T) = (0,1)^T \neq (0,0)^T \Rightarrow f$ ist nicht linear (Bem. 5.2.1).
b) $2 \cdot f((1,0,0)^T) = 2 \cdot (1,0)^T = (2,0)^T \neq (4,0) = (2^2,0) = f((2,0,0)^T) = f(2 \cdot (1,0,0)^T) \Rightarrow$ nicht linear.
c) Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt $f(x) + f(y) = o + o = o = f(x+y)$ und $\lambda f(x) = \lambda \cdot o = o = f(\lambda x) \Rightarrow f$ ist linear.
Da für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $f(x) = o$ ist $\ker f = \mathbb{R}^3$ und $\mathrm{im} f = \{o\}$.

2. Aufgabe:

Gegeben sei die folgende Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left((x_1, x_2, x_3, x_4)^T\right) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + x_3 - 2x_4)^T.$$

a) Beweise, dass f $\mathbb{R}$-linear ist.

b) Bestimme das Bild von $v = (-5, 2, 0, -1)^T$ unter f und zeichne das Bild von $\langle v \rangle$ unter f in ein Koordinatensystem.

c) Gegeben Sei die Basis $B_V := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^4$ und die Basis $B_W := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^2$. Gib eine Darstellungsmatrix A von f bzgl. der Basen B_V und B_W an.

d) Bestimme $\dim(\mathrm{im} f)$ und entscheide, ob f injektiv oder surjektiv ist.

Lösung:
a) Seien $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ beliebig und $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls beliebig. Dann gilt

$$f(x) + f(y) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 - y_3 \\ y_2 + y_3 - 2y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) \\ x_2 + y_2 + x_3 + y_3 - 2(x_4 + y_4) \end{pmatrix} = f(x+y)$$

$$\lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + 2\lambda x_2 - \lambda x_3 \\ \lambda x_2 + \lambda x_3 - 2\lambda x_4 \end{pmatrix} = f(\lambda x).$$

Somit ist f linear.
b) $f(v) = (-5 + 2 \cdot 2 - 0, 2 + 0 - 2 \cdot (-1))^T = (-1, 4)^T$.
Das Erzeugnis von v ergibt sich durch $\langle v \rangle = \{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Da f linear ist, erhalten wir $f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \cdot (-1, 4)^T$. Das heißt, wir erhalten als Bild von $\langle v \rangle$ alle reellen Vielfachen des Vektors $(-1, 4)^T$. Als Bild im Koordinatensystem erhalten wir also den Funktionsgraphen der Funktion $g(x) = -4x$.

c) Bezeichnen wir die Basiselemente in B_V mit $v_1, ..., v_4$ und mit w_1, w_2 die Basiselemente in B_W, so gilt

$$\begin{aligned}
f(v_1) &= \begin{pmatrix} 2 + 2 \cdot 1 - 0 \\ 1 + 0 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot w_1 + (-3) \cdot w_2 \\
f(v_2) &= \begin{pmatrix} 0 + 2 \cdot (-1) - 0 \\ -1 + 0 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \cdot w_1 + (-1) \cdot w_2 \\
f(v_3) &= \begin{pmatrix} 0 + 2 \cdot 0 - 2 \\ 0 + 2 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 \\
f(v_4) &= \begin{pmatrix} 0 + 2 \cdot 0 - 0 \\ 0 + 0 - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot w_1 + 4 \cdot w_2.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Matrix A sind gerade die Faktoren vor den Basiselementen w_1 und w_2. Wir erhalten also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

d) Die Dimension des Bildes von f ist gleich dem Rang einer (jeder) Darstellungsmatrix. Somit ergibt sich mit c)

$$\dim(\mathrm{im} f) = \mathrm{rang}(A) = 2$$

.
Da somit $\dim(\mathrm{im} f) = \dim(\mathbb{R}^2)$ gilt, ist f surjektiv.
Außerdem ist f nicht injektiv, da aufgrund der Dimensionformel gilt

$$\dim(\ker f) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{im} f) = 4 - 2 = 2.$$

Somit ist $\ker f \neq \{o\}$ und damit ist f nicht injektiv.

3. Aufgabe:

Gegeben sei die Matrix A durch

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Funktionsgleichung der zu A gehörenden $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, für die für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $f_A(x) = A \cdot x$. Gib anschließend eine Basis für den Kern von f_A an und berechne die Dimension des Bildes von f_A.

Lösung:
Für alle $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$f_A((x_1, x_2, x_3)^T) = A \cdot (x_1, x_2, x_3)^T = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Um den Kern zu bestimmen, setzen wir $f_A(x) = (0,0,0)^T$ und schauen, für welche Elemente x aus $\mathbb{R}^3$ diese Gleichung erfüllt ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir ein lineares Gleichungssystem, welches wir wie folgt lösen können

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 = 0 &\Rightarrow x_1 = -x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 &\Rightarrow x_2 = x_3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 &\Rightarrow x_3 + x_3 - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich $\ker f_A = \{(-x_3, x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,1,1)^T\rangle$.
Also hat $\ker f_A$ die Dimension 1 und da wir von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ abbilden, ergibt sich mit der Dimensionsformel $\dim(\mathrm{im} f_A) = \dim(V) - \dim(\ker f_A) = 3 - 1 = 2$.

4. Aufgabe:

Sei K ein Körper und U, V, W K-Vektorräume.
Welche der Aussagen sind richtig? Begründe deine Entscheidung.

☐ Sei $f : V \to V$ eine $K-$lineare Abbildung, dann gilt $\mathrm{im} f \cap \ker f = \{0\}$.
Begründung: Ist $f((x,y)^T) := (x-y, x-y)^T$, dann ist $f((1,1)^T) = 0$, also liegt $(1,1)^T$ im Kern von f, aber $f((1,0)^T) = (1,1)^T$, also liegt $(1,1)^T$ auch im Bild von f. Für $V = \mathbb{R}$ stimmt die Aussage.

☐ Sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ ein Homomorphismus, dann gilt $\dim(\ker(f)) \leq 3$.
Begründung: Dimensionsformel liefert $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^5) - \dim(\mathrm{im} f) = 5 - \dim(\mathrm{im} f) \geq 5 - 2 = 3$.

☒ Sei $f : V \to V$ ein Monomorphismus, dann ist f auch ein Isomorphismus.
Begründung: Folgt mit Korollar 5.1.6.

☒ $\mathbb{R}^4$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
Begründung: Man kann zum Beispiel die ersten beiden Komponenten eines Vektors aus $\mathbb{R}^4$ auf die erste Spalte einer $2 \times 2-$Matrix abbilden und die letzten beiden auf die zweite Spalte.

☐ Sei $f : V \to W$ ein Epimorphismus, dann ist $V \cong \mathrm{im} f$.
Begründung: Die Aussage gilt mit dem Homomorphiesatz, wenn f ein Monomorphismus ist. Für f nicht injektiv kann V eine (echt) größere Dimension als W haben und wenn f surjektiv ist, gilt insbesondere $\dim(\mathrm{im} f) = \dim(W)$. Somit kann es in diesem Fall keinen Isomorphismus zwischen V und $\mathrm{im} f$ geben.

☒ Sei U ein $K-$Untervektorraum von V und $f : V \to W$ eine $K-$lineare Abbildung, so ist auch $f(U)$ ein $K-$Untervektorraum von W.
Begründung: Folgt aus den Definitionen für (Unter-)Vektorräume und lineare Funktionen.

5. Aufgabe:

Sei $F : \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiert als $F(g) := g(x_0)$ für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$. Überprüfe, ob F ein Homomorphismus ist. Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ ist F surjektiv?

Lösung:
$V := \text{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Seien $g, h \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} F(g) + F(h) &= g(x_0) + h(x_0) = (g+h)(x_0) = F(g+h) \\ F(\lambda g) &= (\lambda g)(x_0) = \lambda g(x_0) = \lambda F(g). \end{aligned}$$

Somit ist F $\mathbb{R}-$linear.
Für die Surjektivität sei nun $z \in \mathbb{R}$ beliebig, dann gilt für $x_0 \neq 0$ und $g(x) := z \cdot \frac{x}{x_0}$, dass

$$F(g) = g(x_0) = z \cdot \frac{x_0}{x_0} = z$$

ist und somit ist F surjektiv.
Ist $x_0 = 0$, dann ist allerdings $F(g) = g(0) = 0$, für alle Funktionen $g \in \text{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (Bem. 5.2.1). Damit ist F für $x_0 = 0$ nicht surjektiv.

6. Aufgabe:

Sei $V := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = x_3\}$ und $W := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2\}$. Sind V und W isomorph? Wenn ja, gib einen Isomorphismus zwischen V und W an.

Lösung:
Es ist $B_V = ((1,0,1)^T, (0,1,1)^T)$ eine Basis von V und $B_W = ((2,1,0)^T, (0,0,1)^T)$ eine Basis von W. Somit haben beide Räume die Dimension 2 und es existiert ein Isomorphismus zwischen V und W.
Laut Satz 5.1.9 muss gelten, dass dieser Isomorphismus jeweils die Basiselemente von B_V auf die Basiselemente von B_W abbildet. Das hilft einem, auf die Funktion zu kommen.
In diesem Fall kann man auch sehen, dass x_1 und x_2 beliebig gewählt werden können in V, somit können wir einen Isomorphismus $f : V \to W$ definieren wie folgt

$$f((x_1, x_2, x_3)^T) := (2x_1, x_1, x_2)^T, \text{ für alle } (x_1, x_2, x_3)^T \in V.$$

Bem: Diese Funktion ist kein Isomorphismus von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$. Allerdings können wir einen Isomorphismus von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ berechnen, der eingeschränkt auf V ein Isomorphismus nach W ist.
Dafür bilden wir wieder die Basiselemente von B_V auf die Basiselemente von B_W. Dann erweitern wir die Basen B_V, B_W auf Basen von $\mathbb{R}$ (Basisergänzungssatz) und bilden, die ergänzten Basiselemente ebenfalls aufeinander ab. Dann kann man mithilfe eines linearen Gleichungssystems die Koeffizienten der (existierenden) Darstellungsmatrix des Isomorphismus bzgl der Standardbasen bestimmen und unsere Funktionsgleichung direkt ablesen.

Lösungen „Matrizen und LGS"

1. Aufgabe:
Berechne:

$$\left(2\cdot\left(\left(\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\3&4&1\\0&1&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&0\\-4&-2&-2\\0&-3&3\end{pmatrix}\right)\right)^T*\begin{pmatrix}0&2&4\\-2&4&8\\-2&4&10\end{pmatrix}\right)\right)^{-1}$$

Lösung:

$$\left(2\cdot\left(\left(\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\3&4&1\\0&1&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&0\\-4&-2&-2\\0&-3&3\end{pmatrix}\right)\right)^T*\begin{pmatrix}0&2&4\\-2&4&8\\-2&4&10\end{pmatrix}\right)\right)^{-1} = \left(2\cdot\left(\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&2&-1\\0&-2&1\end{pmatrix}^T * \begin{pmatrix}0&2&4\\-2&4&8\\-2&4&10\end{pmatrix}\right)\right)^{-1}$$

$$= \left(2\cdot\left(\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&2&-2\\0&-1&1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0&2&4\\-2&4&8\\-2&4&10\end{pmatrix}\right)\right)^{-1}$$

$$= \left(2\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}1/4&0&0\\0&1/4&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}$$

2. Aufgabe:

Gegeben seien die linearen Gleichungssysteme $A\cdot x=b$ und $B\cdot x=c$ mit folgenden erweiterten Koeffizientenmatrizen:

$$(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{cccc|c}2&0&4&2&b_1\\1&3&5&4&b_2\\2&0&a&2&b_3\end{array}\right),\quad (B\,|\,c)=\left(\begin{array}{cc|c}1&2&3\\2&4&c_2\\3&0&0\end{array}\right)$$

a) Bestimme für $a=3$ den Rang der Koeffizientenmatrix A. Was weiß man nun über die Lösungsmenge?

b) Bestimme für $a=4$ den Rang der Koeffizientenmatrix A. Was weiß man nun über die Lösungsmenge?

c) Bestimme für $a=4$ und $(b_1,b_2,b_3)^T=(2,1,3)^T$ den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix. Was weiß man nun über die Lösungsmenge?

d) Bestimme den Rang der Koeffizientenmatrx B. Wie muss c_2 gewählt werden, damit das LGS $B\cdot x=c$ genau eine/keine Lösung hat?

Lösung: a) Es ist

$$r(A)=r\begin{pmatrix}2&0&4&2\\1&3&5&4\\2&0&3&2\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}2&0&4&2\\2&6&10&8\\2&0&3&2\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}2&0&4&2\\0&6&6&6\\0&0&-1&0\end{pmatrix}=3$$

Da $A\in\mathbb{R}^{3\times4}$ ist und $r(A)=3$ ist, folgt nun: Das LGS $A\cdot x=b$ hat mehrere Lösungen.

b) Es ist

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 10 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Da $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ und $r(A) = 2$ ist, folgt: Das LGS $A \cdot x = b$ hat entweder keine Lösung oder mehrere Lösungen.

c) Es ist

$$r(A|b) = r\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = 3$$

Aus $r(A) = 2 \neq 3 = r(A|b)$ folgt, dass das LGS $A \cdot x = b$ <u>keine</u> Lösung hat.

d) Da B 2 Spalten und 3 Zeilen hat, giet $r(B) \leq 2$. Da die Zeilenvektoren $(1,2)$ und $(3,0)$ linear unabh. sind, folgt $r(B) = 2$. Damit das LGS lösbar ist, muss $r(B) = r(B|c)$ gelten. Es ist

$$r(B|c) = r\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & c_2 \\ 3 & 0 & 0 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & c_2 - 6 \\ 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ist $c_2 = 6$, so folgt $r(B|c) = 2 = rg(B)$. Das LGS häte dann genau eine Lösung (da B 2 Spalten hat).
Ist $c_2 \neq 6$, so folgt $r(B|c) = 3 \neq 2 = rg(B)$.
Dann hätte das LGS keine Lösung.

3. Aufgabe:

Bestimme die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren!

a)

$$\begin{aligned} 2a-3b-2c+4d&=7\\ a+b+c+d&=7\\ a+2b+3c-d&=6\\ 3a-b+c+2d&=10 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3x_1+3x_2+x_3+4x_4&=0\\ 6x_1+6x_2+2x_3+8x_4&=2\\ x_1+x_2+x_3-x_4&=3 \end{aligned}$$

a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -2 & 4 & 7\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7\\ 1 & 2 & 3 & -1 & 6\\ 3 & -1 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{2\cdot\mathrm{III}-\mathrm{I}\\ 2\cdot\mathrm{IV}-3\cdot\mathrm{I}}]{2\cdot\mathrm{II}-\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -2 & 4 & 7\\ 0 & 5 & 4 & -2 & 7\\ 0 & 7 & 8 & -6 & 5\\ 0 & 7 & 8 & -8 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -2 & 4 & 7\\ 0 & 5 & 4 & -2 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 7 & 8 & -8 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{5\cdot\mathrm{IV}-7\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -2 & 4 & 7\\ 0 & 5 & 4 & -2 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 12 & -26 & -54 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -2 & 4 & 7\\ 0 & 5 & 4 & -2 & 7\\ 0 & 0 & 12 & -26 & -54\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ $\underline{\mathrm{IV}}$ $d=\frac{6}{2}=3$

$\Rightarrow$ $\underline{\mathrm{III}}$ $c=\frac{-54+26\cdot 3}{12}=2$

$\Rightarrow$ $\underline{\mathrm{II}}$ $b=\frac{7+2\cdot 3-4\cdot 2}{5}=1$

$\Rightarrow$ I $a=\frac{7-4\cdot 3+2\cdot 2+3\cdot 1}{2}=1$

$$\mathcal{L}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 6 & 6 & 2 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[3\cdot III - I]{II - 2\cdot I} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & 9 \end{array}\right)$ Es folgt sofort $\mathcal{L} = \emptyset$

4. Aufgabe:

Gegeben sei die lineare Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - 2y + 3z \\ x - 2y + 4z \\ 3x - 4y + 7z \end{pmatrix}$. Bestimme die Urbildmenge $g^{-1}\left(\{(0, -6, -6)^T\}\right)$ unter Verwendung des Gauß'schen Eliminationsverfahrens!

Lösung: Gesucht sind alle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$. Daraus ergibt sich ein LGS mit folg. erw. Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -6 \\ 3 & -4 & 7 & -6 \end{array}\right)$$

Wir lösen dieses mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -6 \\ 3 & -4 & 7 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 7 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[III - 3\cdot I]{II - 2\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -5 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III - II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es folgt II $\quad y = \dfrac{12 + 5z}{2} = 6 + \dfrac{5}{2}z$

und I $\quad x = -6 - 4z + 2\cdot\left(6 + \dfrac{5}{2}z\right) = 6 + z$

Somit ist

$$g^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 6 + z \\ 6 + 5/2\, z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$$

5. Aufgabe:

Gegeben ist das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren. Die Lösungsmenge eines **homogenen** LGS ist ein Untervektorraum. Welche Dimension hat dieser in diesem Fall?

b) Zeige, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des folgenden inhomogenen LGS ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c) Bestimme nun, ohne zu rechnen, die Lösungsmenge des LGS aus b).

Lösung: a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II} - 2 \cdot \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Daraus folgt $\underline{\text{II}}$ $x_2 = 0$ und $\underline{\text{III}}$ $x_1 = -2x_3$.
Also ist $\mathcal{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$. $\mathcal{L}_h$ hat die Dimension 1, da $\mathcal{L}_h = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ist und der Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabh. ist.

b) Es ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

c) Laut Vorlesung ergibt sich die Lösungsmenge des inhomogenen LGS als Summe aus der speziellen Lösung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der homogenen Lösungsmenge $\mathcal{L}_h$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_h + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$